

ПРОГРАММА

Тема 1. Линейное программирование

Задачи планирования и управления, их математические модели. Общая постановка задач оптимизации. Различные формы записи задач линейного программирования (ЛП) и их эквивалентность. Геометрическая интерпретация и графическое решение задач ЛП. Свойства решений задач ЛП. Нахождение начального опорного плана. Симплексный метод решения задач ЛП. Метод искусственного базиса.

Двойственность в ЛП. Построение пары взаимно двойственных задач. Основные теоремы двойственности. Экономический смысл двойственных переменных. Двойственный симплекс-метод.

Тема 2. Специальные задачи линейного программирования

Математические модели задач транспортного типа. Открытая и закрытая модели транспортной задачи (ТЗ). Построение начального опорного плана. Метод потенциалов решения ТЗ. Критерий оптимальности.

Элементы теории матричных игр. Решение игры в чистых стратегиях. Смешанные стратегии. Решение матричных игр в смешанных стратегиях путем сведения к паре двойственных задач ЛП.

Основные понятия теории графов. Элементы сетевого планирования. Построение сетевого графика и вычисление временных характеристик.

Задача о кратчайшем пути на сети. Алгоритм Дijkstra.

Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке. Понятие разреза в сети. Алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока.

Т Е М А 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Математические модели задач планирования и управления.

Общая постановка задач оптимизации

Математическое программирование – это область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач на

экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее прежде всего следует записать с помощью математических выражений (уравнений, неравенств и т.п.), т.е. составить экономико-математическую модель данной задачи. Для этого необходимо:

1) ввести *переменные величины* x_1, x_2, \dots, x_n , числовые значения которых однозначно определяют одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выразить взаимосвязи (присущие исследуемому параметру) в виде математических ограничений (уравнений, неравенств), налагаемых на неизвестные величины. Эти соотношения определяют *систему ограничений* задачи, которая образует *область допустимых решений* (область экономических возможностей). *Решение (план)* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее системе ограничений задачи, называют *допустимым (базисным)*;

3) записать критерий оптимальности в форме *целевой функции* $z = z(X)$, которая позволяет выбрать наилучший вариант из множества возможных;

4) составить математическую формулировку задачи отыскания *экстремума* целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные. Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется *оптимальным* и обозначается X_{opt} или X^* .

Составим, например, *математическую модель* следующей задачи.

Пример 1. Пошивочный цех изготавливает три вида обуви из поступающих из раскройного цеха заготовок. Расход заготовок на пару обуви каждого вида, запасы заготовок, а также прибыль, получаемая фабрикой при реализации пары обуви каждого вида, заданы в табл. 1.1. Сколько пар обуви каждого вида следует выпускать фабрике для получения максимальной прибыли при условии, что заготовки II вида необходимо израсходовать полностью?

Т а б л и ц а 1.1

| Обувь вида Виды заготовок | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Запасы заготовок, ед. |
|---------------------------------|----------|----------|----------|--------------------------|
| I | 1 | 2 | - | 12 |
| II | 1 | - | 1 | 4 |
| III | 2 | 2 | - | 14 |
| Прибыль, ден. ед. | 3 | 2 | 1 | |

Решение. Чтобы сформулировать эту задачу математически, обозначим через x_1 , x_2 , x_3 количество пар обуви соответственно видов *A*, *B* и *C*, которое необходимо выпускать фабрике для получения максимальной прибыли. Согласно условиям задачи прибыль от выпуска обуви вида *A* составит $3x_1$ ден. ед., от вида *B* – $2x_2$ ден. ед., от вида *C* – x_3 ден. ед. Следовательно, целевая функция прибыли z выразится формулой

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max.$$

Поскольку переменные x_1 , x_2 и x_3 определяют количество пар обуви, они не могут быть отрицательными, т. е.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Согласно условиям задачи на изготовление всей обуви будет использовано $x_1 + 2x_2$ заготовок 1-го вида. А так как запасы заготовок 1-го вида составляют 12 штук, то должно выполняться неравенство $x_1 + 2x_2 \leq 12$.

На изготовление всей обуви будет использовано $x_1 + x_3$ заготовок 2-го вида. Но так как по условию задачи запасы заготовок 2-го вида необходимо израсходовать полностью, то должно выполняться равенство $x_1 + x_3 = 4$.

Аналогично для заготовок 3-го вида должно выполняться неравенство $2x_1 + 2x_2 \leq 14$.

Следовательно, система ограничений будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 & (\text{количество заготовок вида I}); \\ x_1 + \quad + x_3 = 4 & (\text{количество заготовок вида II}); \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14 & (\text{количество заготовок вида III}). \end{cases}$$

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неотрицательные значения x_1 , x_2 и x_3 , удовлетворяющие системе ограничений и максимизирующие целевую функцию z .

1.2. Различные формы записи задач линейного программирования и их эквивалентность. Приведение задачи к каноническому виду

1.2.1. Каноническая форма записи задач линейного программирования

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max \quad (\text{целевая функция}), \quad (1.1)$$

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (\text{ограничения на переменные}). \quad (1.3)$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов

системы ограничений;

$C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ – матрица-строка коэффициентов целевой функции;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец свободных членов};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец неизвестных.}$$

Тогда каноническую форму записи задачи ЛП (1.1)–(1.3) можно представить в следующем матричном виде, эквивалентном первоначальному:

$$Z = C X \rightarrow \max, \quad (1.4)$$

$$A X = B, \quad (1.5)$$

$$X \geq O. \quad (1.6)$$

где O – нулевая матрица-столбец той же размерности, что и матрица X .

Замечание. Не ограничивая общности, можно полагать, что свободные члены неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ (иначе ограничительные уравнения можно умножить на (-1)).

1.2.2. Симметричная форма записи задач линейного программирования

| | |
|--|--|
| $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$ | $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m},$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$ |
|--|--|

1.2.3. Общая задача линейного программирования

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min), \quad (1.7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_2 + 1, m}, \quad (1.10)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (1.11)$$

$$x_j - \text{произвольного знака}, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}. \quad (1.12)$$

1.2.4. Приведение задачи к каноническому виду

Задачи ЛП могут представляться по-разному, но все их можно привести к каноническому виду, в котором целевая функция z должна быть максимизирована, а все ограничения должны быть заданы в виде равенств с неотрицательными переменными. Приведем произвольную задачу ЛП (1.7)–(1.12) к каноническому виду, используя следующие правила:

1) минимизация целевой функции z равносильна максимизации целевой функции $(-z)$. Так, если целевая функция исходной задачи исследуется на минимум, т.е. $z \rightarrow \min$, то можно рассмотреть функцию с противоположным знаком, которая будет стремиться к максимуму:

$$-z \rightarrow \max;$$

2) ограничения-неравенства вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления к левым частям *дополнительных (балансовых)* неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m_1};$$

3) ограничения-неравенства вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путем вычитания от левых частей дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2};$$

4) дополнительные переменные в целевую функцию вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$c_{n+i} = 0, \quad i = \overline{1, m_2};$$

5) переменные любого знака заменяются разностью двух других неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2, \quad \text{где } x_j^1 \geq 0, \quad x_j^2 \geq 0.$$

Замечание. Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях – потребление соответствующего компонента сверх нормы.

Пример 2. Привести математическую модель задачи из примера 1 к каноническому виду:

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 12, \\ x_1 + & + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq 14, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение. Целевая функция и неравенства являются линейными. Следовательно, это задача линейного программирования. Приведем ее к каноническому виду, прибавляя к левым частям первого и третьего ограничений по одной *дополнительной* неотрицательной переменной (x_4 и x_5 соответственно). При этом получим равенства. Второе ограничение оставим без изменений, так как оно уже яв-

ляется равенством. Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Целевая функция при этом не изменится, так как исследуется на максимум. В результате получим следующую каноническую форму задачи линейного программирования:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Заметим, что сформулированная задача эквивалентна исходной. Другими словами, значения переменных x_1 , x_2 и x_3 в оптимальном решении последней задачи являются оптимальными и для исходной.

1.3. Нахождение начального опорного плана задачи линейного программирования

1. Пусть в системе ограничений имеется единичный неотрицательный базис. Например, задача ЛП имеет вид

$$\begin{cases} z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \\ b_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Говорят, что ограничение-равенство канонической задачи ЛП имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности его правой части ($b_j \geq 0, j = \overline{1, m}$) левая часть содержит переменную с единичным коэффициентом, которая во все остальные ограничения входит с коэффициентами, равными нулю. Если каждое ограничение канонической задачи ЛП имеет предпочтительный вид (т.е. *система ограничений приведена к единичному неотрицательному базису*), то *начальный опорный план* (т.е. неотрицательное базисное решение) строится следующим образом. Предпочтительные переменные выбираются в качестве *базисных*, а все остальные – в качестве *свободных* переменных. Свободные переменные приравняются нулю: $x_j = 0, j = \overline{m+1, n}$, тогда базисные переменные будут равны свободным членам: $x_j = b_j, j = \overline{1, m}$. Начальный опорный план задачи будет иметь вид

$$X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m}).$$

Пример 3. Найти начальный опорный план задачи, приведенной к каноническому виду:

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Решение. Все ограничения системы имеют предпочтительный вид. В первом ограничении предпочтительной (или базисной) является переменная x_4 , во втором – x_3 , в третьем – x_5 (так как они входят лишь в одно из уравнений с коэффициентом, равным единице). Следовательно, система приведена к положительному единич-

ному базису. Для получения опорного решения надо свободные переменные x_1, x_2 приравнять нулю, а базисные переменные x_3, x_4, x_5 – свободным членам, т.е.

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow x_4 = 12, x_3 = 4, x_5 = 14.$$

Тогда начальный опорный план задачи $X_0 = (0; 0; 4; 12; 14)$, а значение целевой функции в этой точке $z(X_0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4$.

2. Пусть задача ЛП представлена в симметричном виде, т.е.

[illegible]

Привести систему ограничений к единичному неотрицательному базису можно, прибавляя к левым частям ограничительных неравенств балансовые неотрицательные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$:

[illegible]

Полученная система ограничений эквивалентна исходной и имеет предпочтительный вид. Аналогично свободные переменные приравниваются нулю, а предпочтительные (базисные) переменные равны свободным членам. Начальный опорный план задачи будет иметь вид

$$X_0 = (\underbrace{0; \quad 0; \quad \dots; \quad 0}_n; \quad b_1; \quad b_2; \quad \dots; \quad b_m), \quad z(X_0) = 0.$$

3. Пусть задача ЛП представлена в следующей симметричной форме:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Привести задачу к каноническому виду можно, рассматривая целевую функцию с противоположным знаком и вычитая из левых частей системы ограничений балансовые переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$:

$$Z = -c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_n X_n \rightarrow \max,$$

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m},$$

$$b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда начальный план

$$X_0 = (\underbrace{0; \quad 0; \quad \dots; \quad 0}_n; \quad -b_1; \quad -b_2; \quad \dots; \quad -b_m), \quad z(X_0) = 0.$$

будет являться базисным решением задачи и называться *псевдопланом*. Псевдоплан не может быть опорным решением, так как содержит отрицательные компоненты.

4. Пусть задача ЛП приведена к каноническому виду, однако система ограничений не имеет единичного неотрицательного базиса:

[illegible]

Для получения предпочтительного вида вводят неотрицательные *искусственные переменные* и рассматривают вспомогательную задачу:

[illegible]

Ее начальный опорный план будет иметь вид

$$X_0 = (\underbrace{0; \quad 0; \quad \dots; \quad 0}_n; \quad b_1; \quad b_2; \quad \dots; \quad b_m),$$

$$w(X_0) = -b_1 - b_2 - \dots - b_m.$$

Замечание. Если некоторые из ограничительных уравнений системы имеют предпочтительный вид (т.е. содержат базисную переменную), то искусственные переменные в них не вводят (что упрощает решение задачи).

1.4. Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования симметричного вида относительно двух переменных:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \quad (1.13)$$

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2. \quad (1.15)$$

1.4.1. Геометрическая интерпретация области допустимых значений

1. Любое из неравенств (1.14) на плоскости Ox_1x_2 определяет некоторую полуплоскость.

2. Система неравенств (1.14)–(1.15) определяет выпуклое множество (выпуклый многоугольник, неограниченную выпуклую многоугольную область, пустую область или точку), которое совпадает с многогранником решений D .

1.4.2. Геометрическая интерпретация целевой функции

1. Уравнение $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фиксированном значении $z = z_0$ определяет на плоскости $Ox_1 x_2$ прямую $z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. При изменении z получают семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня*.

2. Вектор коэффициентов целевой функции $\vec{c} = (c_1; c_2)$ называется *градиентом функции*. Он перпендикулярен линиям уровня.

3. Градиент функции $\vec{c} = (c_1; c_2)$ показывает направление наибольшего возрастания целевой функции.

4. Антиградиент $-\vec{c} = (-c_1; -c_2)$ показывает направление наибольшего убывания целевой функции.

1.4.3. Графическое решение задач линейного программирования

Суть графического метода решения задач ЛП основывается на следующих утверждениях:

- 1) совокупность опорных планов задачи ЛП совпадает с системой вершин многогранника решений;
- 2) целевая функция достигает оптимального значения в вершине многогранника решений.

Для практического решения задачи (1.13) – (1.15) необходимо:

- 1) построить с учетом системы ограничений область допустимых решений D (многогранник планов);
- 2) построить вектор градиента \vec{c} ;
- 3) построить перпендикулярно к нему в области допустимых решений одну из прямых семейства $z = \text{const}$;
- 4) искомая точка экстремума X_{opt} найдется параллельным перемещением вспомогательной прямой $z = \text{const}$ в направлении вектора \vec{c} (если ищется z_{\max}) и в направлении вектора $-\vec{c}$ (если ищется z_{\min});

5) координаты точки X_{opt} можно определить, решив совместно уравнения прямых, пересекающихся в этой точке, или по чертежу.

Замечание. Если оптимальное значение целевая функция принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин. *Выпуклой линейной комбинацией* точек X_1, X_2, \dots, X_k называется сумма $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$, где $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k}$.

1.4.4. Задача со многими переменными

Задачу со многими переменными можно решить графически, если в ее канонической записи присутствуют не более двух свободных переменных. Чтобы решить такую задачу, необходимо:

- 1) выделить некоторый базис переменных в системе ограничительных уравнений;
- 2) опустить базисные переменные и перейти к эквивалентной системе неравенств;
- 3) выразить целевую функцию через свободные переменные;
- 4) полученную двумерную задачу рушить обычным графическим способом;
- 5) найдя две координаты оптимального решения, подставить их в ограничительные уравнения и определить остальные координаты оптимального плана.

Пример 4. Решить задачу линейного программирования из примера 1 графическим способом:

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 12, \\ x_1 + \quad + x_3 & = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq 14, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Решение. Это задача с тремя переменными. Ее можно решить графически, если в канонической или симметричной записи будет присутствовать не более двух свободных переменных. Приведем данную задачу к симметричному виду. Для этого из 2-го уравнения выразим базисную переменную x_3 :

$$x_3 = 4 - x_1,$$

подставим ее значение в целевую функцию:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_1 + 2x_2 + 4 - x_1 = 2x_1 + 2x_2 + 4 \rightarrow \max.$$

Так как $x_3 \geq 0$, то $4 - x_1 \geq 0$, что равносильно неравенству $x_1 \leq 4$. Следовательно, система ограничений примет следующий симметричный вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Полученную двумерную задачу решим обычным графическим способом.

1. Так как $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, то область допустимых решений будет находиться в первой координатной четверти. На плоскости Ox_1x_2 (рис. 1.1) построим прямые, порождаемые уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{6} = 1 & - \text{ прямая } l_1, \\ x_1 = 4 \Leftrightarrow \frac{x_1}{4} = 1 & - \text{ прямая } l_2, \\ 2x_1 + 2x_2 = 14 \Leftrightarrow \frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{7} = 1 & - \text{ прямая } l_3. \end{cases}$$

(Уравнение прямой в отрезках $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$ означает, что прямая линия отсекает на оси Ox_1 отрезок длиной a , а на оси Ox_2 – отрезок длиной b .)

2. Относительно каждой прямой определим полуплоскость, соответствующую исходным неравенствам

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14. \end{cases}$$

Чтобы определить полуплоскость, соответствующую 1-му неравенству $x_1 + 2x_2 \leq 12$, возьмем точку, не лежащую на прямой $x_1 + 2x_2 = 12$ (например, $(0; 0)$), и подставим ее в неравенство $x_1 + 2x_2 \leq 12$ ($0 + 2 \cdot 0 \leq 12 \Leftrightarrow 0 \leq 12$). Если неравенство выполняется, то точка принадлежит данной полуплоскости, в противном случае – не принадлежит. В нашем примере неравенство $x_1 + 2x_2 \leq 12$ определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой $l_1: x_1 + 2x_2 = 12$.

3. Построим вектор градиента $\vec{c} = (2; 2)$, т.е. соединим точки начала $(0; 0)$ и конца $(2; 2)$ стрелкой. Перпендикулярно к нему построим одну из прямых семейства $z = 2x_1 + 2x_2 + 4 = \text{const}$. Например, при $x_1 = x_2 = 1$ получим $z = 8$. Заметим, что эта прямая параллельна $l_3: 2x_1 + 2x_2 = 14$.

4. Вспомогательную прямую $z = 8$ будем параллельно перемещать в направлении вектора \vec{c} (так как ищется Z_{\max}) до последней точки пересечения с областью допустимых решений D . В нашем случае прямая Z_{\max} совпадает с прямой $l_3: 2x_1 + 2x_2 = 14$. Поэтому искомым точкам экстремума X_{opt} будет множество: все точки отрезка $[X_{opt}^1; X_{opt}^2]$. Координаты точек X_{opt}^1 и X_{opt}^2 можно определить по рис. 1.1: $X_{opt}^1 = (2; 5)$ и $X_{opt}^2 = (4; 3)$. Но так как первоначальная задача имеет три неизвестные, то x_3 найдем, подставив значение переменной x_1 во 2-е ограничительное уравнение:

1) для $X_{opt}^1 = (2; 5)$ получим: $x_3 = 4 - x_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow X_{opt}^1 = (2; 5; 2);$

2) для $X_{opt}^2 = (4; 3)$ получим: $x_3 = 4 - x_1 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow X_{opt}^2 = (4; 3; 0)$.

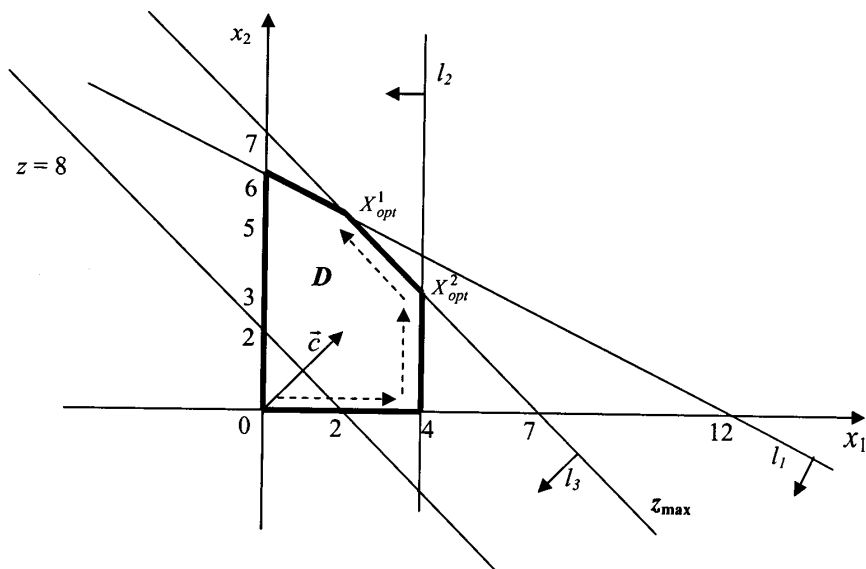


Рис. 1.1

5. Для аналитической записи любого оптимального решения X_{opt} необходимо составить выпуклую линейную комбинацию опорных решений X_{opt}^1 и X_{opt}^2 : $X_{opt} = \lambda_1 X_{opt}^1 + \lambda_2 X_{opt}^2$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Следовательно,

$$X_{opt} = \lambda_1 (2; 5; 4) + \lambda_2 (4; 3; 0) = (2\lambda_1 + 4\lambda_2; 5\lambda_1 + 3\lambda_2; 2\lambda_1),$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Тогда

$$z_{\max} = z(X_{opt}^1) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 18 = z(X_{opt}^2).$$

Итак, чтобы получить максимальную прибыль, равную 18 ден. ед., фабрике необходимо:

1) по X_{opt}^1 : выпускать 2 пары обуви вида A , 5 пар обуви вида B и 2 пары обуви вида C . При этом заготовки 1-го и 3-го видов будут израсходованы полностью (так как $x_4^* = 0$ и $x_5^* = 0$).

2) по X_{opt}^2 : выпускать 4 пары обуви вида A , 3 пары обуви вида B и не выпускать обувь вида C . При этом 2 заготовки 1-го вида (из 12) будут не использованы (так как $x_4^* = 2$), а заготовки 3-го вида будут израсходованы полностью (поскольку $x_5^* = 0$).

1.5. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Одним из универсальных методов решения задач ЛП является симплекс-метод или метод последовательного улучшения плана. Если задача разрешима, то ее оптимальный план совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений системы ограничений. Именно этот опорный план и отыскивается симплекс-методом в результате упорядоченного перебора опорных решений. Упорядоченность понимается в том смысле, что при переходе от одного опорного плана к другому соответствующие им значения целевой функции возрастают (или, по крайней мере, не убывают). Так как общее число опорных решений конечно, то через определенное число шагов будет либо найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи. Чтобы получить новый опорный план, первоначальный базис преобразовывают в новый. Для этого из первоначального базиса удаляют некоторую базисную переменную и вместо нее вводят другую из группы свободных.

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как переход по ребрам от одной вершины многогранника решений к другой по направлению к вершине X_{opt} , в которой целевая функция достигает оптимального значения.

1.5.1. Этапы решения задачи ЛП симплекс-методом

Решение задачи ЛП складывается из нескольких этапов:

1. Задача должна быть приведена к каноническому виду, притом все элементы столбца свободных членов должны быть неотрицательными.
2. Найден начальный опорный план задачи.
3. Целевая функция выражена через свободные переменные и максимизирована.
4. По симплексному методу находится оптимальный план задачи.

1.5.2. Нахождение оптимального опорного плана

Пусть система ограничений имеет предпочтительный вид, т.е. найден начальный опорный план задачи. Не ограничивая общности, предположим:

[illegible]

Исключим базисные переменные из целевой функции. Для этого выразим их через свободные переменные из системы ограничительных уравнений:

$$x_i = b_i - (a_{im+1}x_{m+1} + \dots + a_{in}x_n), \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

и подставим в выражение функции z . Получим приведенные коэффициенты целевой функции:

$$Z = Z_0 - c'_{m+1}x_{m+1} - c'_{m+2}x_{m+2} - \dots - c'_{m+n}x_{m+n} \rightarrow \max.$$

Составим исходную симплекс-таблицу, записывая приведенные коэффициенты целевой функции в z -строку с противоположными знаками, а константу z_0 со своим знаком.

Симплекс-таблица

| Б | З | x_1 | x_2 | ... | x_m | x_{m+1} | ... | x_{m+k} | ... | x_n |
|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------------|-----|-------------|-----|----------|
| x_1 | b_1 | 1 | 0 | ... | 0 | $a_{1,m+1}$ | ... | $a_{1,m+k}$ | ... | a_{1n} |
| x_2 | b_2 | 0 | 1 | ... | 0 | $a_{2,m+1}$ | ... | $a_{2,m+k}$ | ... | a_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_l | b_l | 0 | 0 | ... | 0 | $a_{l,m+1}$ | ... | $a_{l,m+k}$ | ... | a_{ln} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_m | b_m | 0 | 0 | ... | 1 | $a_{m,m+1}$ | ... | $a_{m,m+k}$ | ... | a_{mn} |
| z | z_0 | 0 | 0 | ... | 0 | c'_m | ... | c'_{m+k} | ... | c'_n |

1. Если в z -строке симплекс-таблицы, содержащей некоторый опорный план, нет отрицательных элементов (не считая свободного члена z_0), то данный план оптимален и задача решена. К тому же, если в z -строке симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, нет нулевых элементов (не считая z_0 и элементов, соответствующих базису), то оптимальный план единственный. Если же в z -строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, есть хотя бы один нулевой элемент, соответствующий свободной переменной, то задача ЛП имеет бесконечное множество решений.

2. Если в z -строке есть хотя бы один отрицательный элемент (не считая z_0), а в любом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого столбец с отрицательным элементом c'_{m+k} в z -строке берут за разрешающий (если в z -строке отрицательных элементов несколько, то за разрешающий выбирают столбец с наименьшим элементом). Следовательно, столбец с номером $m+k$ станет *ведущим* или *разрешающим* и переменная x_{m+k} будет включена в базис.

3. Среди элементов ведущего столбца находят положительные. Если таковых нет, то задача не имеет решений в силу неограниченности целевой функции ($z \rightarrow \infty$).

4. Для положительных элементов $a_{i,m+k}$ подсчитывают симплексные отношения (отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца) $b_i/a_{i,m+k}$, $i = \overline{1, m}$, и выбирают среди них наименьшее. Пусть минимальное симплексное отношение будет в строке l . Строка с номером l станет ведущей (разрешающей), а элемент $a_{l,m+k}$ – *ведущим*. Переменная x_l выйдет из базиса.

5. Выполняют одну итерацию по замещению базисной переменной методом Жордана–Гаусса. Строят новую симплексную таблицу и переходят к первому пункту.

Замечание. Опорное решение называется *невыврожденным*, если все его компоненты положительные, в противном случае оно называется *вырожденным*. Задача ЛП называется *невыврожденной*, если все ее опорные планы невырожденные. Если среди опорных решений есть хотя бы одно вырожденное, то задача называется *вырожденной*. В этом случае возможен вариант, когда значение целевой функции при переходе от одного опорного плана к другому не улучшится и может произойти так называемое закливание. Для избежания этого фактора изменяют последовательность вычислений путем изменения разрешающего столбца.

Рассмотрим симплекс-метод и метод замещения Жордана–Гаусса на примере.

Пример 5. Решить задачу ЛП из примера 1 симплекс-методом:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + \quad + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Решение. Исходные данные:

1) задача приведена к каноническому виду, притом все элементы столбца свободных членов неотрицательны (см. пример 2):

$$\begin{aligned}
 z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14, \end{cases} \\
 x_j &\geq 0, j = \overline{1,5};
 \end{aligned}$$

2) найден начальный опорный план задачи (см. пример 3):

$$X_0 = (0; 0; 4; 12; 14), \quad z(X_0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4;$$

3) целевая функция выражена через свободные переменные и максимизирована (см. пример 4):

$$z = 2x_1 + 2x_2 + 4 \rightarrow \max.$$

Занесем коэффициенты целевой функции и системы ограничений в симплексную таблицу следующим образом:

- 1-е ограничение $x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$ – в 1-ю строку:
 - а) в базисный столбец «Б» – базисную переменную x_4 ;
 - б) в столбец значений (базисной переменной) «З» – значение свободного члена, равное 12;
 - в) в столбцы коэффициентов « x_j » – коэффициенты при x_j , равные 1, 2, 0, 1, 0 соответственно;
 - 2-е ограничение – во 2-ю строку (аналогично);
 - 3-е ограничение – в 3-ю строку (аналогично);
 - целевую функцию – в z -строку:
 - а) в столбец значений (целевой функции) «З» – константу со своим знаком, т.е. 4;
 - б) в столбцы коэффициентов « x_j » – коэффициенты при x_j с противоположными знаками, равные -2, -2, 0, 0, 0 соответственно.
- Составим исходную симплекс-таблицу 1.

Симплекс-таблица 1

| Б | 3 | $x_1 \downarrow$ | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|------------------|----|------------------|-------|-------|-------|-------|
| x_4 | 12 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $\leftarrow x_3$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x_5 | 14 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| z | 4 | <u>-2</u> | -2 | 0 | 0 | 0 |

В z -строке есть отрицательные элементы (не считая значения). Следовательно, начальный опорный план не является оптимальным. Найдем минимальный отрицательный элемент z -строки: (-2) в столбцах « x_1 » и « x_2 ». За ведущий выбираем любой столбец, например « x_1 ». Значит, переменная x_1 будет включена в базис.

Так как среди элементов ведущего столбца есть положительные, то существует новый опорный план, более близкий к оптимальному. Подсчитаем симплексные отношения (отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца) и найдем среди них минимальное: $\min\{12/1; 4/1; 14/2\} = 4$. Значит, 2-я строка является ведущей, а элемент $a_{21} = 1$ – разрешающим. Следовательно, переменная x_3 выйдет из базиса.

Проведем одну итерацию метода замещения (базисных элементов) Жордана–Гаусса. Столбцы « x_4 » и « x_5 » останутся базисными и в симплекс-таблице 2, а столбец « x_1 » следует сделать «единичным». Новые данные в симплекс-таблицу 2 заносим по следующему алгоритму:

1. Ведущий элемент делают равным 1. Для этого ведущую строку делят на ведущий элемент. В нашем случае ведущий элемент равен 1. Значит, ведущая строка останется прежней. Перепишем ее в симплекс-таблицу 2 и назовем строкой, полученной из ведущей.

2. Остальные элементы ведущего столбца делают нулевыми.

- Чтобы в 1-й строке вместо 1 получить 0, необходимо каждый элемент строки, полученной из ведущей, умножить на (-1) и прибавить почленно к 1-й строке. (Проще говоря, строку, полученную из ведущей, умножить на (-1) и прибавить к 1-й строке.)

- Чтобы в 3-й строке вместо 2 получить 0, необходимо строку, полученную из ведущей, умножить на (-2) и прибавить к 3-й строке.

- Чтобы в z -строке вместо (-2) получить 0 , необходимо строку, полученную из ведущей, умножить на 2 и прибавить к z -строке.

Симплекс-таблица 2

| Б | 3 | x_1 | $x_2 \downarrow$ | x_3 | x_4 | x_5 |
|------------------|----|-------|------------------|-------|-------|-------|
| x_4 | 8 | 0 | 2 | -1 | 1 | 0 |
| x_1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\leftarrow x_5$ | 6 | 0 | 2 | -2 | 0 | 1 |
| z | 12 | 0 | <u>-2</u> | 2 | 0 | 0 |

Таблицы пересчитывают до тех пор, пока в z -строке все элементы (не считая значения) станут неотрицательными.

Симплекс-таблица 3

| Б | 3 | x_1 | x_2 | $x_3 \downarrow$ | x_4 | x_5 |
|------------------|----|-------|-------|------------------|-------|-------|
| $\leftarrow x_4$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| x_1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x_2 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0,5 |
| z | 18 | 0 | 0 | <u>0</u> | 0 | 1 |

Так как в z -строке симплекс-таблицы 3 все элементы больше или равны нулю, то найден оптимальный план:

$$X_{opt}^1 = (4; 3; 0; 2; 0), \quad z_{\max} = z(X_{opt}^1) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 18.$$

Он не единственный, так как существует нулевой элемент z -строки, соответствующий свободной переменной x_3 . (Решение единственное, если нули в z -строке соответствуют только базисным переменным.)

Чтобы найти второй оптимальный план, столбец « x_3 » принимают за ведущий и находят минимальное симплексное отношение: $\min\{2/1; 4/1\} = 2$. Тогда 1-я строка станет ведущей. Пересчитывают

симплекс-таблицу 3 методом замещения Жордана–Гаусса с ведущим элементом $a_{13} = 1$ и заносим в симплекс-таблицу 4.

Симплекс-таблица 4

| Б | 3 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| x_1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| x_2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | -0,5 |
| z | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Из последней таблицы $X_{opt}^2 = (2; 5; 2; 0; 0)$, а значение целевой функции $z_{\max} = 18$.

Общее решение записывается как выпуклая линейная комбинация решений X_{opt}^1 и X_{opt}^2 , т.е. $X_{opt} = \lambda_1 X_{opt}^1 + \lambda_2 X_{opt}^2$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

1.5.3. Метод искусственного базиса

Если начальный опорный план задачи находится методом искусственного базиса, то сначала надо решить симплекс-методом вспомогательную w -задачу. При этом необходимо в начальную симплекс-таблицу включить и z -строку, соответствующую целевой функции исходной задачи. Для составления симплекс-таблицы из функции z исключают базисные переменные, а из функции w – искусственные базисные переменные. В ходе решения возможны случаи:

1) в оптимальном решении w -задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля (т.е. не вышла из базиса). Тогда исходная z -задача не имеет допустимых планов (т.е. ее система ограничений несовместна);

2) в оптимальном плане новой w -задачи все искусственные переменные равны нулю (т.е. вышли из базиса), а значит, и искусственная целевая функция равна нулю. Тогда значения оставшихся координат плана дадут начальный опорный план исходной задачи, которую можно решить симплекс-методом.

Рассмотрим метод искусственного базиса на следующем примере.

Пример 6. Хлебозавод может выпекать хлеб в любой из трех видов печей Π_1 , Π_2 , Π_3 . Трудоемкость и себестоимость выпечки 1 центнера хлеба на каждом виде печи представлены в табл. 1.2. Сколько хлеба необходимо выпечь в каждой печи, чтобы его суммарная себестоимость была минимальной при условии, что трудовые ресурсы ограничены 56 н/ч, а общее количество горячего хлеба должно быть не менее 60 ц?

Т а б л и ц а 1.2

| Вид печи | Π_1 | Π_2 | Π_3 |
|-------------------------|---------|---------|---------|
| Трудоемкость, н/ч | 1 | 0,9 | 1,2 |
| Себестоимость, ден. ед. | 21 | 19 | 22 |

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 , x_2 и x_3 центнеров хлеба необходимо выпекать в печах Π_1 , Π_2 и Π_3 соответственно, чтобы его суммарная себестоимость была минимальной. Согласно условиям задачи себестоимость выпечки хлеба в печи Π_1 будет составлять $21x_1$ ден. ед., в печи Π_2 – $19x_2$ ден. ед., в печи Π_3 – $22x_3$ ден. ед. Значит, целевая функция z будет задаваться формулой

$$z = 21x_1 + 19x_2 + 22x_3 \rightarrow \min.$$

Так как неизвестные x_1 , x_2 и x_3 выражают количество центнеров хлеба, они не могут быть отрицательными, т. е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

При этом трудовых ресурсов на выпечку всего хлеба будет использовано $x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3$ н/ч. А так как трудовые ресурсы ограничены 56 н/ч, то должно выполняться неравенство $x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 \leq 56$.

Всего выпекут $x_1 + x_2 + x_3$ центнеров хлеба. Но так как по условию задачи общее количество горячего хлеба должно быть не менее 60 ц, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x_1 + x_2 + x_3 \geq 60$.

Следовательно, система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 \leq 56 & (\text{количество трудовых ресурсов}), \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 60 & (\text{количество выпеченного хлеба}). \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы найти неотрицательные значения x_1 , x_2 и x_3 , удовлетворяющие системе ограничений и минимизирующие целевую функцию z .

Целевая функция и неравенства являются линейными. Следовательно, это задача линейного программирования. Приведем ее к каноническому виду. Для этого к левой части первого ограничения прибавим *дополнительную* неотрицательную переменную x_4 и получим равенство, а из левой части второго ограничения вычтем *дополнительную* неотрицательную переменную x_5 , чтобы получилось равенство. Так как целевая функция минимизируется, то рассмотрим функцию $z' = -z$, которая будет стремиться к максимуму, т.е.

$$z' = -z = -21x_1 - 19x_2 - 22x_3 \rightarrow \max.$$

Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. В результате получим следующую каноническую форму:

$$z' = -21x_1 - 19x_2 - 22x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 + \underline{x_4} = 56, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 60, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}.$$

Сформулированная задача эквивалентна исходной, т. е. значения переменных x_1 , x_2 и x_3 в оптимальном решении последней задачи являются оптимальными и для исходной задачи.

Так как во втором ограничении нет базисной переменной, начальный опорный план найдем методом искусственного базиса. Для

получения предпочтительного вида введем неотрицательную *искусственную переменную* x_6 во второе ограничительное уравнение и рассмотрим вспомогательную *и*-задачу:

$$\begin{aligned} w &= -x_6 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 + \underline{x_4} &= 56, \\ x_1 + x_2 &+ x_3 &- x_5 + \underline{x_6} = 60, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{aligned}$$

Выпишем начальный опорный план *и*-задачи, приравняв свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_5 нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. Тогда базисные переменные x_4, x_6 будут равняться свободным членам: $x_4 = 56, x_6 = 60$. Следовательно,

$$X_0 = (0; 0; 0; 56; 0; 60), \quad w(X_0) = -60.$$

Решим сначала симплекс-методом вспомогательную *и*-задачу. При этом в начальную симплекс-таблицу 1 включим *и* z' -строку, соответствующую целевой функции z' исходной задачи. Для составления симплекс-таблицы исключим базисные переменные из целевой функции z' и искусственной целевой функции *и*. Переменная x_4 не входит в функцию z' . Значит, z' остается без изменений. А переменную x_6 выразим из 2-го ограничения ($x_6 = 60 - x_1 - x_2 - x_3 + x_5$) и подставим в искусственную целевую функцию *и*:

$$w = -x_6 = x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - 60 \rightarrow \max.$$

Составим исходную симплекс-таблицу 1.

Симплекс-таблица 1

| Б | З | $x_1 \downarrow$ | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|------------------|-----|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\leftarrow x_4$ | 56 | 1 | 0,9 | 1,2 | 1 | 0 | 0 |
| x_6 | 60 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| z' | 0 | 21 | 19 | 22 | 0 | 0 | 0 |
| w | -60 | <u>-1</u> | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 |

Так как w -строке есть отрицательные элементы (не считая значения), то начальный опорный план w -задачи не является оптимальным. Найдем минимальный отрицательный элемент w -строки: это (-1) в столбцах « x_1 », « x_2 » и « x_3 ». За ведущий выбираем любой столбец, например « x_1 ». Значит, переменная x_1 будет включена в базис.

Так как среди элементов a_{11} и a_{21} ведущего столбца есть положительные, то существует новый опорный план w -задачи, более близкий к оптимальному. Подсчитаем симплексные отношения и найдем среди них минимальное: $\min\{56/1; 60/1\} = 56$. Значит, 1-я строка станет ведущей, а элемент $a_{11} = 1$ – разрешающим. Следовательно, переменная x_4 выйдет из базиса. При этом столбец « x_6 » останется «единичным» и в симплекс-таблице 2, а столбец « x_1 » надо сделать «единичным». Таблицу пересчитываем методом замещения Жордана–Гаусса и заносим новые данные в симплекс-таблицу 2, как было рассмотрено в примере 5.

Симплекс-таблица 2

| Б | З | x_1 | $x_2 \downarrow$ | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|------------------|-------|-------|------------------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 56 | 1 | 0,9 | 1,2 | 1 | 0 | 0 |
| $\leftarrow x_6$ | 4 | 0 | 0,1 | -0,2 | -1 | -1 | 1 |
| z' | -1176 | 0 | 0,1 | -3,2 | -21 | 0 | 0 |
| w | -4 | 0 | <u>-0,1</u> | 0,2 | 1 | 1 | 0 |

Во 2-й таблице ведущим элементом станет $a_{22} = 0,1$ и искусственная переменная x_6 уйдет из базиса. А когда искусственные переменные выходят из базиса, соответствующие им столбцы можно не пересчитывать.

В общем случае таблицы пересчитывают до тех пор, пока в w -строке все элементы не станут нулевыми.

Симплекс-таблица 3

| Б | З | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 20 | 1 | 0 | 3 | 10 | 9 |
| x_2 | 40 | 0 | 1 | -2 | -10 | -10 |
| z' | -1180 | 0 | 0 | -3 | -20 | 1 |
| w | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Итак, получен оптимальный план w -задачи, где все искусственные переменные равны нулю (т.е. вышли из базиса). Значит, и искусственная целевая функция равна нулю. Значения оставшихся координат плана дадут начальный опорный план исходной z -задачи: $X^0 = (20; 40; 0; 0; 0)$. Вычеркнем w -строку и решим z -задачу симплекс-методом.

Симплекс-таблица 4

| Б | 3 | x_1 | x_2 | x_3 | $x_4 \downarrow$ | x_5 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|------------------|-------|
| $\leftarrow x_1$ | 20 | 1 | 0 | 3 | 10 | 9 |
| x_2 | 40 | 0 | 1 | -2 | -10 | -10 |
| z | -1180 | 0 | 0 | -3 | <u>-20</u> | 1 |

Теперь ведущий столбец выбирается по z -строке, ведущий (разрешающий) элемент, как и раньше, – по минимальному симплексному отношению. Пересчитывают таблицу методом замещения Жордана–Гаусса до тех пор, пока в z -строке все элементы (не считая значения) станут неотрицательными.

Симплекс-таблица 5

| Б | 3 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_4 | 2 | 0,1 | 0 | 0,3 | 1 | 0,9 |
| x_2 | 60 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 |
| z | -1140 | 2 | 0 | 3 | 0 | 19 |

Так как в симплекс-таблице 5 все элементы z -строки больше или равны нулю (не считая значения), то найден оптимальный план. Он единственный, так как нули в z -строке соответствуют только базисным переменным.

$$X_{opt} = (0; 60; 0; 2; 0), \quad z_{\max} = z(X_{opt}) = -1140.$$

Следовательно, $z_{\min} = 1140$.

Исходя из этих данных, можно заключить: чтобы получить минимальную суммарную себестоимость от выпечки всего хлеба, равную 1140 ден. ед., хлебозаводу необходимо выпекать 60 ц хлеба в печи L_2 (так как $x_2^* = 60$) и не выпекать хлеб в печах Π_1 и Π_3 (поскольку $x_1^* = 0$ и $x_3^* = 0$). При этом 2 н/ч (из 56 н/ч) будут не использованы (так как $x_4^* = 2$) и выпекут ровно 60 ц хлеба (поскольку $x_5^* = 0$).

1.6. Двойственность в линейном программировании

С любой задачей ЛП тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется *прямой* (или исходной). Пара симметричных двойственных задач имеет вид

| <i>Прямая задача</i> | <i>Двойственная задача</i> |
|--|--|
| $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ | $F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n},$ |
| $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$ | $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$ |

Экономически пара взаимно двойственных задач может быть интерпретирована, например, так.

Прямая задача: сколько и какой продукции $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции $c_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, объемах имеющихся ресурсов $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, и нормах расходов $a_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $y_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, чтобы при заданных количествах ресурсов $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, величинах стоимости единицы продукции $c_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, и нормах расходов $a_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

Переменные $y_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, называют *оценками* или *учетными* (неявными, теневыми) ценами.

1.6.1. Правила построения двойственной задачи к исходной задаче ЛП в общем виде

| Прямая задача | Двойственная задача |
|---|---|
| $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ | $F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m_1},$ | $y_i \geq 0, i = \overline{1, m_1},$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m},$ | $y_i - \text{произвольные}, i = \overline{m_1 + 1, m},$ |
| $x_j \geq 0, j = \overline{1, n_1},$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1, n_1},$ |
| $x_j - \text{произвольные}, j = \overline{n_1 + 1, n}.$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, j = \overline{n_1 + 1, n}.$ |

1. Упорядочивается запись исходной задачи: если целевая функция задачи исследуется на \max , то ограничения должны иметь знак \leq или $=$, а если на \min , то ограничения должны иметь знак \geq или $=$.

2. Каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие двойственная переменная y_i , $i = \overline{1, m}$, и наоборот, т.е. число переменных двойственной задачи равно числу ограничений прямой задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной задачи.

3. Если целевая функция прямой задачи исследуется на \max , то целевая функция двойственной задачи исследуется на \min , и наоборот.

4. Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами системы ограничений двойственной задачи.

5. Свободные члены системы ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной.

6. Матрицы коэффициентов систем ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

7. Если на переменную $x_j (j = \overline{1, n_1})$ прямой задачи наложено ограничение на знак, то j -е ограничение двойственной задачи записывается в виде неравенства, и наоборот.

8. Если переменная $x_j (j = \overline{n_1 + 1, n})$ исходной задачи произвольная, то j -е ограничение двойственной задачи имеет знак равенства.

9. Если в прямой задаче имеются ограничения-равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не налагаются условия неотрицательности.

Пример 7. Составить к следующей задаче ЛП двойственную:

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 & \geq -12, \\ x_1 + \quad + x_3 & = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq 14, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Решение.

1. Упорядочим запись задачи. Для этого первое ограничение умножим на (-1) :

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 12, \\ x_1 + \quad + x_3 & = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq 14, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

2. Каждому ограничению исходной задачи поставим в соответствие двойственную переменную $y_i, i = \overline{1, 3}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 12 & \Leftrightarrow & y_1 \geq 0, \\ x_1 + \quad + x_3 & = 4 & \Leftrightarrow & y_2 = \forall, \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq 14 & \Leftrightarrow & y_3 \geq 0. \end{cases}$$

И наоборот, число переменных исходной задачи равно числу ограничений двойственной.

3. Так как целевая функция прямой задачи исследуется на \max , то целевая функция двойственной задачи будет исследоваться на \min :

$$z \rightarrow \max \Rightarrow F \rightarrow \min.$$

4. Свободные члены системы ограничений прямой задачи 12, 4, 14 станут коэффициентами целевой функции двойственной, т.е.

$$F = 12 y_1 + 4 y_2 + 14 y_3 \rightarrow \min.$$

5. Коэффициенты целевой функции прямой задачи 3, 2, 1 станут свободными членами системы ограничений двойственной задачи.

6. Матрицы коэффициентов систем ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу, т.е.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, получим следующую систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2 y_3 \text{ (знак } \geq, \leq, =) \text{ } 3, \\ 2 y_1 + \quad + 2 y_3 \text{ (знак } \geq, \leq, =) \text{ } 2, \\ y_2 \text{ (знак } \geq, \leq, =) \text{ } 1. \end{cases}$$

7. Так как все переменные $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$, то вместо знака везде будут неравенства. Вид неравенств выбирается по целевой функции. Поскольку F исследуется на \min , то неравенства должны быть со знаком \geq . Значит, система ограничений примет следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2 y_3 \geq 3, \\ 2 y_1 + \quad + 2 y_3 \geq 2, \\ y_2 \geq 1. \end{cases}$$

Слово «наоборот» из пункта 7 правил построения двойственной задачи в данном случае означает, что если i -е ограничение прямой задачи имеет вид неравенства, то на i -ю переменную двойственной задачи налагается условие неотрицательности. Следовательно, в нашем примере $y_1 \geq 0$ и $y_3 \geq 0$, так как 1-е и 3-е ограничения прямой задачи являются неравенствами.

8. В нашей задаче нет переменных x_j произвольного знака.

9. Так как 2-е ограничение имеет вид равенства, то на соответствующую переменную двойственной задачи не будет налагаться условие неотрицательности, т.е. $y_2 - \forall$ (любая).

Значит, двойственная задача к исходной примет вид

$$F = 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3, \\ 2y_1 + \quad + 2y_3 \geq 2, \\ \quad y_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 - \forall, y_3 \geq 0.$$

1.6.2. Основные теоремы двойственности и их экономическое содержание

Пусть имеется симметричная пара взаимно двойственных задач.

| Прямая задача | Двойственная задача |
|--|--|
| $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ | $F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m},$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1, n},$ |
| $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$ | $y_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$ |

Основное неравенство теории двойственности. Для любых допустимых планов $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $Y = (y_1; y_2; \dots; y_m)$ прямой и двойственной задач всегда справедливо неравенство

$$z(X) \leq F(Y) \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

Экономическое содержание неравенства означает, что для любых допустимых планов X и Y общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

Достаточный признак оптимальности. Если для некоторых допустимых планов $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ пары двойственных задач выполняется равенство $z(X^*) = F(Y^*)$, то X^* и Y^* являются оптимальными планами соответствующих задач.

Экономический смысл теоремы состоит в том, что план X^* и вектор оценок ресурсов Y^* являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Принцип двойственности. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, притом для оптимальных планов X^* и Y^* выполняется равенство $z(X^*) = F(Y^*)$. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов, то система ограничений другой задачи противоречива.

Следствие (теорема существования оптимальных планов). Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой.

Экономическая интерпретация принципа двойственности состоит в том, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции равна суммарной оценке ресурсов, т.е. оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что гарантируют рентабельность оптимального плана (т.е. равенство общей оценки продукции и ресурсов) и обуславливают убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставить и сбалансировать затраты и результаты решения.

Теорема о дополняющей нежесткости. Для оптимальности допустимых планов $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ прямой и двойственной задач необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\text{если } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^* = 0;$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* < c_j, \text{ то } x_j^* = 0.$$

Экономически это означает: если по некоторому оптимальному плану X^* производства расход i -го ресурса строго меньше его запаса b_i , то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю ($y_i^* = 0$); если же в некотором оптимальном плане оценок его i -я компонента строго больше нуля ($y_i^* > 0$), то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса b_i равен его запасу.

Вывод. При решении двойственных задач могут встретиться следующие случаи:

- 1) обе задачи разрешимы (имеют планы);
- 2) области допустимых решений обеих задач пустые;
- 3) одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, а вторая – пустую.

Решая одну из пары *симметричных двойственных задач*, автоматически получаем решение другой. Для этого достаточно воспользоваться соответствием переменных прямой и двойственной задач и элементов z -строки последней симплексной таблицы. Для *несимметричной пары двойственных задач* решение также находится по последней симплексной таблице. В ней в строке оценок (z -строке) находят элементы, соответствующие переменным, которые входили в исходный базис, и прибавляют к ним соответствующие коэффициенты исходной целевой функции. Величина двойственной оценки из оптимального плана численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений (ресурса) на единицу.

Пример 8. Дана пара взаимно двойственных задач.

| | |
|--|---|
| <p><i>Прямая задача</i></p> $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + \quad + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | <p><i>Двойственная задача</i></p> $F = 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3, \\ 2y_1 + \quad + 2y_3 \geq 2, \\ y_2 \geq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 - \forall, y_3 \geq 0. \end{cases}$ |
|--|---|

Зная оптимальное решение прямой задачи, выписать ответ двойственной задачи. Дать экономическую интерпретацию двойственных оценок.

Решение. Базисным переменным прямой задачи x_4, x_3, x_5 поставим в соответствие свободные переменные двойственной задачи y_1, y_2, y_3 . Удобно свободные переменные двойственной задачи y_1, y_2, y_3 написать рядом с базисными переменными прямой задачи x_4, x_3, x_5 в 1-й симплекс-таблице следующим образом:

1-я симплекс-таблица

| Б | 3 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|---------------------------|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_4 \leftrightarrow y_1$ | 12 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $x_3 \leftrightarrow y_2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_5 \leftrightarrow y_3$ | 14 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| z | 4 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 |

Перепишем их под последнюю симплекс-таблицу (где записан оптимальный план прямой задачи) следующим образом:

Последняя симплекс-таблица

| Б | 3 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| x_1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x_2 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0,5 |
| z | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$y_2 \qquad y_1 \qquad y_3$

Решение двойственной задачи находим по последней симплекс-таблице в строке оценок (z -строке). Так как у нас *несимметричная пара двойственных задач*, то в z -строке найдем элементы, соответствующие переменным y_2, y_1, y_3 : 0, 0, 1 (или, что то же самое, соответствующие переменным, которые входили в исходный базис, x_3, x_4, x_5). Прибавим к ним соответствующие коэффициенты исходной целевой функции прямой задачи:

$y_2 = 0 + 1 = 1$ (так как в целевой функции прямой задачи коэффициент при x_3 равен 1);

$y_1 = 0 + 0 = 0$ (потому что в целевую функцию прямой задачи x_4 не входит);

$y_3 = 1 + 0 = 1$ (так как в целевую функцию прямой задачи x_5 не входит).

Следовательно, $Y_{opt} = (0; 1; 1)$.

Оптимальные двойственные оценки удовлетворяют всем условиям двойственной задачи. При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи, равное $F_{\min} = 12 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 18$, совпадает с максимальным значением целевой функции Z_{\max} исходной задачи.

Дадим экономическую интерпретацию двойственных оценок. Переменные $y_2^* = 1$ и $y_3^* = 1$ обозначают оценки единицы заготовок 2-го и 3-го видов соответственно. Эти оценки отличны от нуля. Следовательно, заготовки 2-го и 3-го видов (по теореме о дополняющей нежесткости) полностью используются при оптимальном плане производства обуви. Двойственная оценка y_1^* единицы заготовки 1-го вида равна нулю. Значит (по теореме о дополняющей нежесткости), заготовки 1-го вида используются не полностью при оптимальном плане производства обуви. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемых фабрикой заготовок, т.е. заготовки 2-го и 3-го вида являются дефицитными, а заготовки 1-го вида – недефицитными.

Более того, величина двойственной оценки из оптимального плана показывает, на сколько возрастет максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества заготовок соответствующего вида на 1 штуку. Так, увеличение количества заготовок 2-го вида на 1 штуку приведет к тому, что появится воз-

возможность найти оптимальный план производства обуви, при котором общая стоимость изготавливаемой обуви возрастет на $y_2^* = 1$ ден. ед. и станет равной $18 + 1 = 19$ ден. ед. Точно так же увеличение количества заготовок 3-го вида на 1 штуку приведет к тому, что появится возможность найти оптимальный план производства обуви, при котором общая стоимость изготавливаемой обуви возрастет на $y_3^* = 1$ ден. ед. и станет равной $18 + 1 = 19$ ден. ед.

1.7. Двойственный симплекс-метод

Симплекс-метод применяется для решения задач с неотрицательными свободными членами b_i и произвольными по знаку приведёнными коэффициентами целевой функции c'_j . Иногда бывает легче найти базис, удовлетворяющий признаку оптимальности (все $c'_j \geq 0$), но не удовлетворяющий критерию допустимости (не все $b_i \geq 0$). Вариант симплекс-метода, применяемый для решения таких задач, называется *двойственным симплекс-методом*. С его помощью решаются задачи линейного программирования вида

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^n c'_j x_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где система ограничений имеет предпочтительный вид и все приведённые коэффициенты целевой функции $c'_j \geq 0, j = \overline{1, n}$. При этом условие $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, не требуется. Определённую таким образом задачу будем называть *задачей в двойственной базисной форме*. Она имеет базисное, но не опорное решение.

Двойственный симплекс-метод, применяемый к задаче в двойственной базисной форме, приводит к последовательности задач с

возрастающим значением целевой функции, неотрицательными коэффициентами $c'_j, j = \overline{1, n}$, и значениями $b_i, i = \overline{1, m}$, любого знака. Двойственный симплекс-метод называют методом последовательного улучшения оценок. Преобразования задачи выполняются до тех пор, пока не будет установлено, что исходная задача не имеет допустимого решения или будет получена задача с допустимым базисным планом (все $b_i \geq 0$), который одновременно будет и оптимальным.

1.7.1. Этапы решения задач ЛП двойственным симплекс-методом

1. Привести исходную задачу к каноническому виду.
2. Исключить базисные переменные из целевой функции z .
3. Проверить приведенные коэффициенты целевой функции: если все приведенные коэффициенты $c'_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, а среди значений $b_i, i = \overline{1, m}$, есть отрицательные, то задача решается двойственным симплекс-методом. Если среди приведенных коэффициентов c'_j есть положительные, то в системе ограничений следует преобразовать свободные члены в неотрицательные (умножив на число (-1) строки, содержащие отрицательные b_i) и решать задачу прямым симплекс-методом.

1.7.2. Двойственный симплекс-метод

1. Составить исходную таблицу Гаусса, записывая приведенные коэффициенты целевой функции в z -строку с противоположными знаками, а константу z_0 со своим знаком.
2. Выяснить, имеется ли хотя бы одно отрицательное число в столбце значений свободных членов. Если все $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, то полученное базисное решение и значение целевой функции, записанное в столбце свободных членов, дают оптимальное решение исходной задачи (так как по предположению все $c'_j \geq 0, j = \overline{1, n}$).

3. Среди отрицательных коэффициентов b_i , $i = \overline{1, m}$, выбрать минимальный. Пусть это b_l . Следовательно, строка с номером l – ведущая и переменную x_l исключают из базиса.

4. В ведущей строке проверить знаки всех коэффициентов a_{lj} , $j = \overline{1, n}$. Если все $a_{lj} \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, то исходная задача неразрешима в силу несовместности системы ограничений.

5. Среди отрицательных коэффициентов a_{lj} , $j = \overline{1, n}$, ведущей строки выбрать минимальное *двойственное отношение* (отношение элементов z -строки, взятых со знаком минус, к соответствующим отрицательным элементам ведущей строки):
$$\min_{a_{lj} < 0} \left(\frac{c'_j}{a_{lj}} \right) = \frac{c_k}{a_{lk}}.$$

Следовательно, столбец с номером k – ведущий, а элемент a_{lk} – разрешающий. Переменную x_k включить в базис.

6. Пересчитать таблицу методом Жордана–Гаусса с ведущим элементом a_{lk} и перейти к пункту 2.

Пример 9. Решить задачу из примера 6 двойственным симплекс-методом:

$$\begin{aligned} z &= 21x_1 + 19x_2 + 22x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 \leq 56, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 60, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Решение. 1. Приведем задачу к каноническому виду (см. пример 6):

$$\begin{aligned} z' &= -(21x_1 + 19x_2 + 22x_3 + 0x_4 + 0x_5) \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 + \underline{x_4} = 56, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 60, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Двойственный симплекс-метод применяется только к задачам в двойственной базисной форме, т.е. к задачам, в которых система ограничений имеет предпочтительный вид, а все приведённые коэффициенты целевой функции положительны ($c'_j \geq 0, j = \overline{1,5}$). При этом условие неотрицательности свободных членов ($b_i \geq 0, i = \overline{1,2}$) не требуется. Чтобы привести эту задачу к предпочтительному виду, необходимо 2-е ограничение умножить на (-1) . Тогда переменная x_5 станет базисной (а в 1-м ограничении уже есть базисная переменная x_4):

$$\begin{cases} x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 + \underline{x_4} = 56, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + \underline{x_5} = -60, \end{cases}$$

Теперь задача имеет базисное, но не опорное решение (псевдо-план):

$$X_{\text{ПС}} = (0; 0; 0; 56; -60), \quad z(X_{\text{ПС}}) = 0.$$

2. Базисные переменные x_4, x_5 не входят в целевую функцию z' . Значит, z' останется без изменений.

3. Так как все приведенные коэффициенты целевой функции неотрицательны:

$$c'_1 = 21, \quad c'_2 = 19, \quad c'_3 = 22, \quad c'_4 = 0, \quad c'_5 = 0,$$

а среди значений свободных членов есть отрицательные ($b_2 = -60$), то задачу нужно решать двойственным симплекс-методом. Такой способ решения, как правило, более рациональный.

Составим исходную двойственную симплекс-таблицу.

Двойственная симплекс-таблица 1

| Б | З | x_1 | $x_2 \downarrow$ | x_3 | x_4 | x_5 |
|------------------|------------|-------|------------------|-------|-------|-------|
| x_4 | 56 | 1 | 0,9 | 1,2 | 1 | 0 |
| $\leftarrow x_5$ | <u>-60</u> | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| z' | 0 | 21 | 19 | 22 | 0 | 0 |

3.1. Так как в столбце значений свободных членов есть отрицательное число ($b_2 = -60$), то базисное решение не является оптимальным. Следовательно, строка с номером 2 – ведущая и переменную x_5 исключим из базиса.

3.2. В ведущей строке проверим знаки всех коэффициентов a_{2j} , $j = \overline{1,5}$ (если все $a_{2j} \geq 0$, $j = \overline{1,5}$, то исходная задача неразрешима в силу несовместности системы ограничений). Среди отрицательных коэффициентов $a_{21} = -1$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = -1$ ведущей строки выберем минимальное двойственное отношение (отношение элементов z -строки, взятых со знаком минус, к соответствующим отрицательным элементам ведущей строки):

$$\min \left\{ -\frac{21}{-1}; -\frac{19}{-1}; -\frac{22}{-1} \right\} = \min \{21; 19; 22\} = 19.$$

Тогда столбец с номером 2 – ведущий, а элемент $a_{22} = -1$ – разрешающий. Значит, переменную x_2 включим в базис.

3.3. Пересчитаем таблицу методом замещения Жордана–Гаусса с ведущим элементом $a_{22} = -1$ и занесем новые данные в двойственную симплекс-таблицу 2.

Двойственная симплекс-таблица 2

| Б | 3 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_4 | 2 | 0,1 | 0 | 0,3 | 1 | 0,9 |
| x_2 | 60 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 |
| z' | -1140 | 2 | 0 | 3 | 0 | 19 |

Поскольку в столбце значений свободных членов все элементы больше или равны нулю ($b_1 = 2$, $b_2 = 60$), то найден оптимальный план:

$$X_{opt} = (0; 60; 0; 2; 0), \quad z'_{\max} = z(X_{opt}) = -1140. \text{ Тогда } z_{\min} = 1140.$$

Решение единственное, так как нулевые элементы z -строки соответствуют только базисным переменным x_2 , x_4 .